Corrigé des exercices sur l'équilibre de rotation

Exercice 1

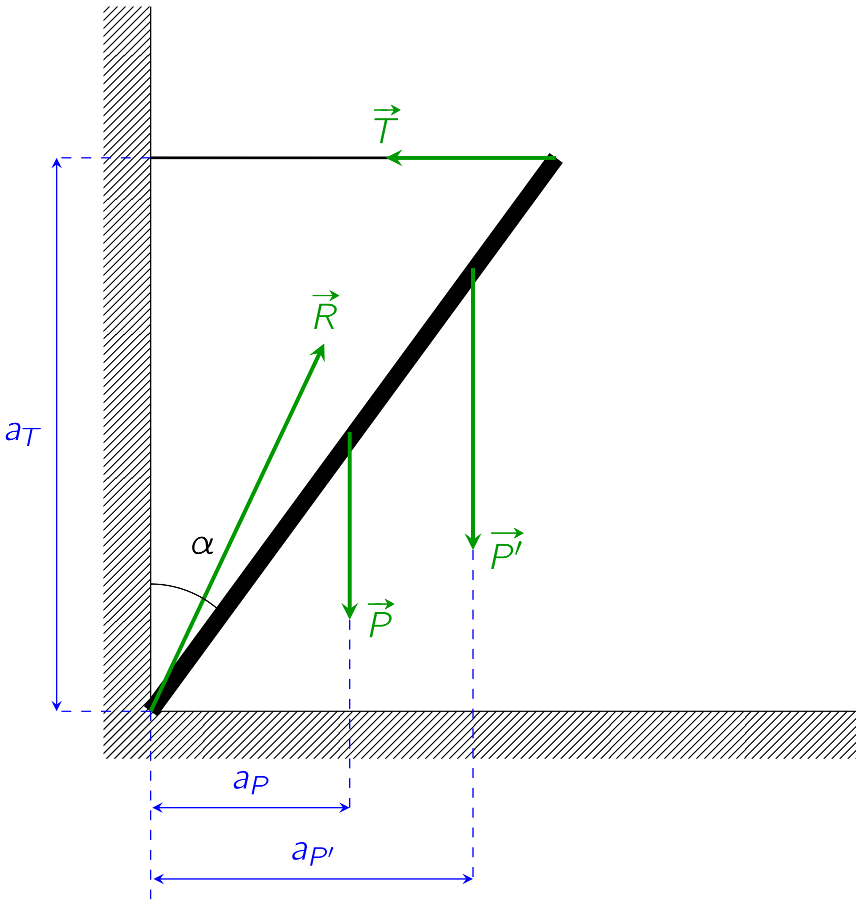

Figure 1 – Forces et bras de leviers

a) Voir la figure 1.

b) Considérons l'équilibre de rotation de l'échelle. L'axe de rotation Δ se situe au coin où est posée l'échelle et le sens positif choisi est le sens trigonométrique (sens anti-horaire). Les forces appliquées à l'échelle avec leurs bras de leviers respectifs sont :

— le poids de l'échelle $\vec{P}$ avec $a_P = \frac{1}{2}L\sin\alpha$

— le poids de l'enfant $\vec{P'}$ avec $a_{P'} = 0{,}8L\sin\alpha$

— la tension du fil $\vec{T}$ avec $a_T = L\cos\alpha$

La condition d'équilibre s'écrit :

$$
\begin{aligned}
& M_+ = M_- \\
\Leftrightarrow \quad & M_\Delta\left(\vec{T}\right) = M_\Delta\left(\vec{P}\right) + M_\Delta\left(\vec{P'}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & T \cdot a_T = P \cdot a_P + P' \cdot a_{P'} \\
\Leftrightarrow \quad & TL\cos\alpha = mg \cdot \frac{1}{2} L\sin\alpha + m'g \cdot 0{,}8L\sin\alpha \quad \mid : (L\cos\alpha) \\
\Leftrightarrow \quad & T = \frac{\left(\frac{1}{2}m + 0{,}8m'\right) \cdot g\sin\alpha}{\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

A.N. $\quad T = 185\,\mathrm{N}$

c) On applique l'équilibre de translation : $\sum \vec{F} = 0$. Relions les différentes forces dans un schéma tel qu'illustré à la figure 2. D'après ce schéma, nous constatons que :
   - $R^2 = (P + P')^2 + T^2$ (théorème de Pythagore), ce qui nous permet de déterminer l'intensité de la réaction de l'axe : $R = 390\,\mathrm{N}$
   - L'angle θ que la réaction de l'axe forme avec l'horizontale est obtenu par la relation $\tan\theta = \dfrac{P + P'}{T}$. Le calcul nous fournit alors $\theta = 61{,}7°$.

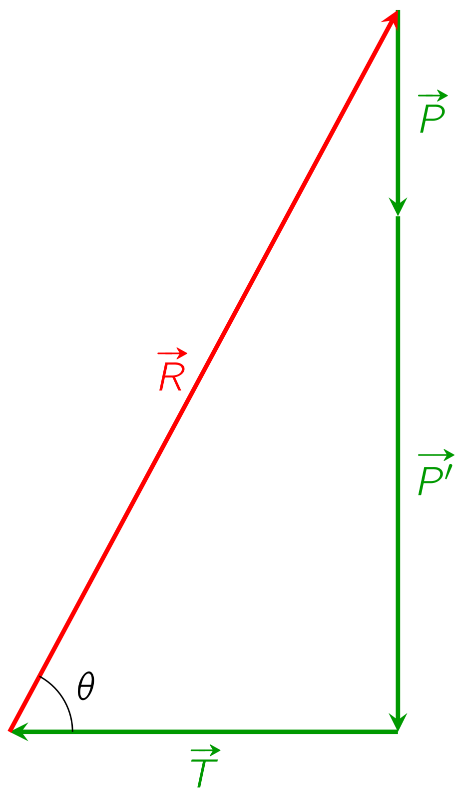

Figure 2 – Détermination de la réaction de l'axe

Exercice 2

a) Notons Δ l'axe de rotation qui se situe au niveau de la fixation du mât au mur. Le sens positif est le sens anti-horaire. Les forces appliquées au mât sont la tension du fil $\vec{T}$, le poids du mât $\vec{P}$ et le poids du panneau $\overrightarrow{P_P}$. L'équilibre de rotation s'écrit :

$$\begin{aligned}
& M_+ = M_- \\
\Leftrightarrow \quad & M_\Delta\left(\vec{T}\right) = M_\Delta\left(\vec{P}\right) + M_\Delta\left(\overrightarrow{P_P}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & T \cdot a_T = P \cdot a_P + P_P \cdot a_{P_P} \\
\Leftrightarrow \quad & T L \sin\alpha = P \cdot \frac{L}{2} + P_P \cdot L \\
\Leftrightarrow \quad & T L \sin\alpha = \left(\frac{1}{2}m + m_P\right) \cdot g \cdot L \\
\Leftrightarrow \quad & T = \frac{\left(\frac{1}{2}m + m_P\right) \cdot g}{\sin\alpha}
\end{aligned}$$

A.N. $\quad T = 128\,\mathrm{N}$

Remarquons que la longueur L du mât n'intervient pas dans le calcul ! Elle n'est donc pas indispensable et on pourrait la laisser de côté dans l'énoncé.

b) Avec les mêmes notations qu'au point précédent, on obtient cette fois-ci :

$$\begin{aligned}
& M_+ = M_- \\
\Leftrightarrow \quad & T \cdot \frac{2}{3}L \cdot \sin\alpha = P \cdot \frac{L}{2} + P_P \cdot L \\
\Leftrightarrow \quad & T = \frac{\left(\frac{1}{2}m + m_P\right) \cdot g}{\frac{2}{3}\sin\alpha}
\end{aligned}$$

A.N. $\quad T = 110\,\mathrm{N}$

c) Même raisonnement qu'aux points a) et b). Ici on trouve :

$$T = \frac{\left(\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}m_P\right) \cdot g}{\frac{3}{4}\sin\alpha}$$

A.N. $\quad T = 150\,\mathrm{N}$

Exercice 3

L'axe de rotation se situe au niveau du clou. Le sens positif choisi est le sens anti-horaire. Notons P_1 le poids du côté gauche de l'équerre et a_1 son bras de levier. Soit l_1 la longueur du côté gauche de l'équerre. Les mêmes notations avec l'indice 2 sont utilisées pour le côté droit. Remarquons que $P_2 = 2 \cdot P_1$ et que $l_2 = 2 \cdot l_1$. L'équilibre de rotation se note alors dans ce cas-ci :

$$\begin{aligned}
& M_+ = M_- \\
\Leftrightarrow \quad & P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2 \\
\Leftrightarrow \quad & P_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cos\theta = P_2 \cdot \frac{l_2}{2} \sin\theta \\
\Leftrightarrow \quad & P_1 \cdot \frac{l_1}{2} \cos\theta = 2P_1 \cdot \frac{2l_1}{2} \cdot \sin\theta \quad | : (P_1 \cdot l_1) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2} \cos\theta = 2 \sin\theta \\
\Leftrightarrow \quad & \tan\theta = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

A.N. $\quad \theta = 14^\circ$