Chapitre 5: Oscillations d'un pendule élastique horizontal

1. Définitions

a) Oscillateur mécanique

* Un système mécanique qui effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre est dit oscillateur mécanique. Une **oscillation** est un aller-retour autour de la position d'équilibre.
* Exemples : mouvement des marées, battements du cœur, ...

b) Oscillateur libre

* C'est un oscillateur abandonné à lui-même après excitation extérieure.
* Exemples : pendule simple, pendule élastique, ...

c) Oscillateur harmonique

* C'est un oscillateur dont l'évolution dans le temps suit une loi sinusoïdale du temps.
* Exemples : pendule élastique sans frottement (cas idéalisé)

d) Oscillateur forcé

* C'est un oscillateur excité par un dispositif extérieur imposant le rythme d'oscillation.
* Exemples : mouvement des marées, haut-parleurs, ...

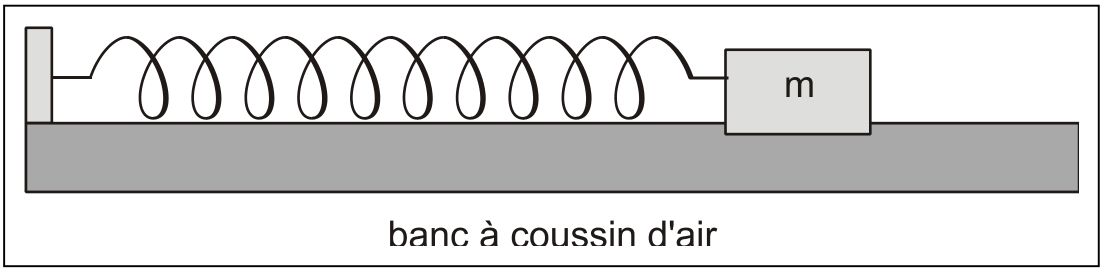
e) Oscillateur amorti

* C'est un oscillateur dont les oscillations s'affaiblissent au cours du temps.
* Exemples : pendule élastique réel, mouvement d'une corde de piano, ...

2. Expérience fondamentale: pendule élastique horizontal

a) Description du pendule élastique

Disposons sur un rail à coussin d'air un chariot pouvant glisser pratiquement sans frottement. Il est attaché à l'une des extrémités d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est fixe. Les spires du ressort sont non-jointives, de sorte que le ressort peut également être comprimé.



b) Observations

Ecartons légèrement le chariot de sa position d'équilibre et lâchons-le sans vitesse initiale.

Le solide effectue des **oscillations libres** autour de sa position d'équilibre. Ces oscillations sont **légèrement amorties** à cause de la résistance de l'air freinant le chariot.

3. Etude dynamique et cinématique du pendule élastique horizontal

a) Données

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort de raideur k et d'un solide de masse m. On néglige tout frottement (idéalisation !). Tirons le chariot, à partir de sa position d'équilibre, d'une distance d **vers la droite**. Lâchons le corps sans vitesse initiale.

b) Système. Référentiel. Repère

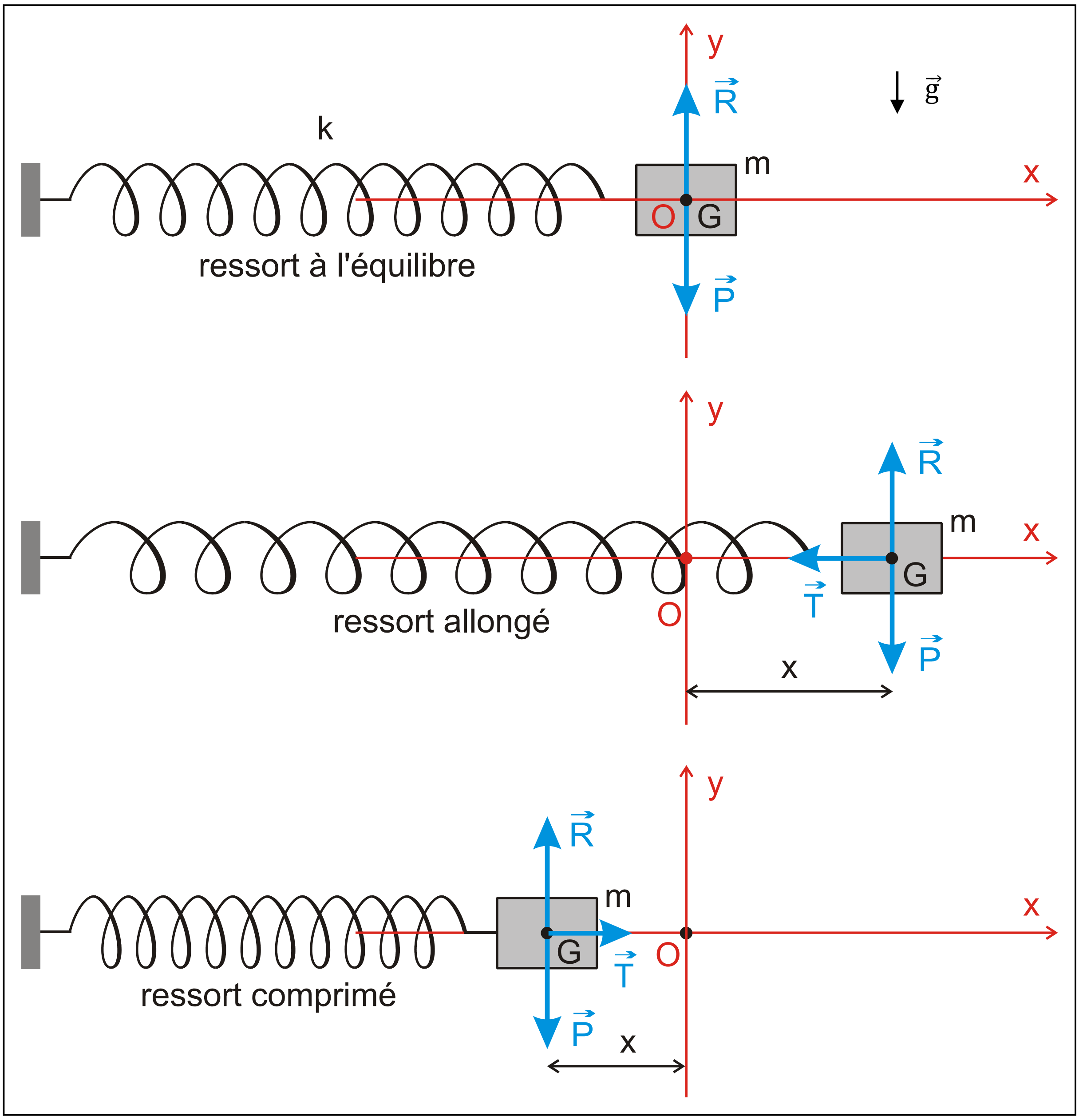
* Le système étudié est le corps de masse m.
* Le référentiel est celui de la Terre (= celui où le pendule est au repos).
* L'origine O du repère est le centre d'inertie G du solide lorsque le ressort n'est pas déformé.
* L'axe Ox est parallèle au ressort et orienté dans le sens de l'étirement du ressort. L'axe Oy est vertical. (On n'a pas besoin du 3^e axe Oz car il n'y a pas de force ni de mouvement selon cet axe.)

b) Conditions initiales

Le corps est lâché à l'instant initial.

$t = 0 \Rightarrow \quad x_0 = d > 0$

$\qquad\qquad v_{0x} = 0$



c) Forces extérieures

* Poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$ $P_x = 0$ $P_y = -P$

* Force pressante du coussin d'air $\vec{R}$ $R_x = 0$ $R_y = R$

* Tension du ressort $\vec{T}$ $T_x = -k \cdot x$ $T_y = 0$

En effet : d'après la loi de Hooke: tension $T = k \cdot x$ de composante T_x:

si le ressort est étiré: $x > 0$ et $T_x = -k \cdot x < 0$ car T_x orienté selon les Ox négatifs

si le ressort est comprimé: $x < 0$ et $T_x = -k \cdot x > 0$ car T_x orienté selon les Ox positifs

d) Accélération

Appliquons le principe fondamental de la dynamique (2e principe de Newton) :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\,\vec{a}$$

ici : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\,\vec{a}$ (1)

Projection de l'équation vectorielle (1) sur les axes :

sur l'axe Ox : $0 + 0 - k \cdot x = m\,a_x$

sur l'axe 0y : $-P + R + 0 = m\,a_y$

Selon Ox on trouve : $a_x = -\dfrac{k}{m}x$ (2)

Selon Oy on trouve : $a_y = 0$ car P = R (mouvement selon l'axe Ox)

Conclusion :

L'accélération selon Oy est nulle. Le mouvement est rectiligne selon Ox.
L'accélération selon Ox n'est donc pas constante. Elle dépend de la déformation x du ressort (= écartement du solide par rapport à sa position d'équilibre = **élongation** du solide). Elle est constamment dirigée vers la position d'équilibre du solide.

e) Equation différentielle du mouvement

Comme $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, l'équation (2) donne: $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x}$

C'est l'équation différentielle du mouvement !

f) Solution de l'équation différentielle du mouvement

Résoudre une telle équation revient à chercher la fonction du temps x(t) qui possède une dérivée seconde telle que :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

L'étude mathématique de cette équation fournit comme solution :

$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où X_m, ω_0 et φ sont des constantes.

Vérifions sa validité ! Dérivons : $v_x = \frac{dx}{dt} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -X_m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

Remplaçons dans l'équation différentielle : $-\omega_0^2 x = -\frac{k}{m}x$

La fonction $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ convient comme solution, si on a:

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, ce qui est possible car m et k sont positifs ! Posons donc : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Conclusion :

> L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ peut s'écrire : $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$,
>
> avec **pulsation propre :** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$.
>
> La solution générale de ce type d'équation est alors une fonction sinusoïdale de la forme : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
>
> $\omega_0 t + \varphi$ est appelé **phase** et φ **phase initiale de l'oscillateur**.
>
> **L'équation horaire du mouvement x(t) est une fonction sinusoïdale du temps : le pendule élastique horizontal est un oscillateur harmonique.**

Remarque : De la même façon on montre que $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle.

g) Amplitude du mouvement

Comme $-1 < \cos(\omega_0 t + \varphi) < 1$, l'élongation x varie entre $-X_m$ et $+X_m$.

> La valeur maximale X_m que l'élongation peut prendre est l'amplitude de l'élongation.

Par convention, les amplitudes sont toujours positives : $X_m > 0$

h) Période, fréquence et pulsation d'un mouvement harmonique

* Une fonction sinusoïdale du type $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est périodique. Elle reprend la même valeur chaque fois que la phase $\omega t + \varphi$ change de $2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

On appelle période T la durée d'une oscillation. *(En mouvement circulaire uniforme, la période est la durée d'un tour.)*

* Déterminons T ! De quelle durée T faut-il augmenter t pour que la phase augmente de 2π ?

$$\omega(t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

La **période** du mouvement est donc donnée par : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

* La **fréquence** du mouvement s'écrit : $\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

* ω est appelée **pulsation**. *(En mouvement circulaire uniforme, ω est la vitesse angulaire.)*

i) Période propre, fréquence propre et pulsation propre du pendule élastique horizontal

Comme l'oscillateur est libre, il oscille avec sa période propre T_0, sa fréquence propre f_0 et sa pulsation propre ω_0.

La **période propre** est donnée par : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

La **fréquence propre** est donnée par : $\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

La **pulsation propre** est donnée par : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

j) Détermination de l'amplitude X_m et de la phase initiale φ

Nous déterminons ces constantes à l'aide des conditions initiales :

$t = 0 \Rightarrow$ abscisse initial $x_0 = d > 0$

vitesse initiale $v_{0x} = 0$

Abscisse : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (3)

Vitesse : $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ (4)

Remplaçons les conditions initiales dans les équations (3) et (4) :

$d = X_m \cos\varphi > 0$ (5)

$0 = -X_m \omega_0 \sin\varphi$ (6)

(6) $\Rightarrow$ $\sin\varphi = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi = 0$ ou bien $\varphi = \pi$

(5) $\Rightarrow$ $X_m \cos\varphi > 0$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi > 0$ car $X_m > 0$: la solution $\varphi = \pi$ est donc à rejeter !

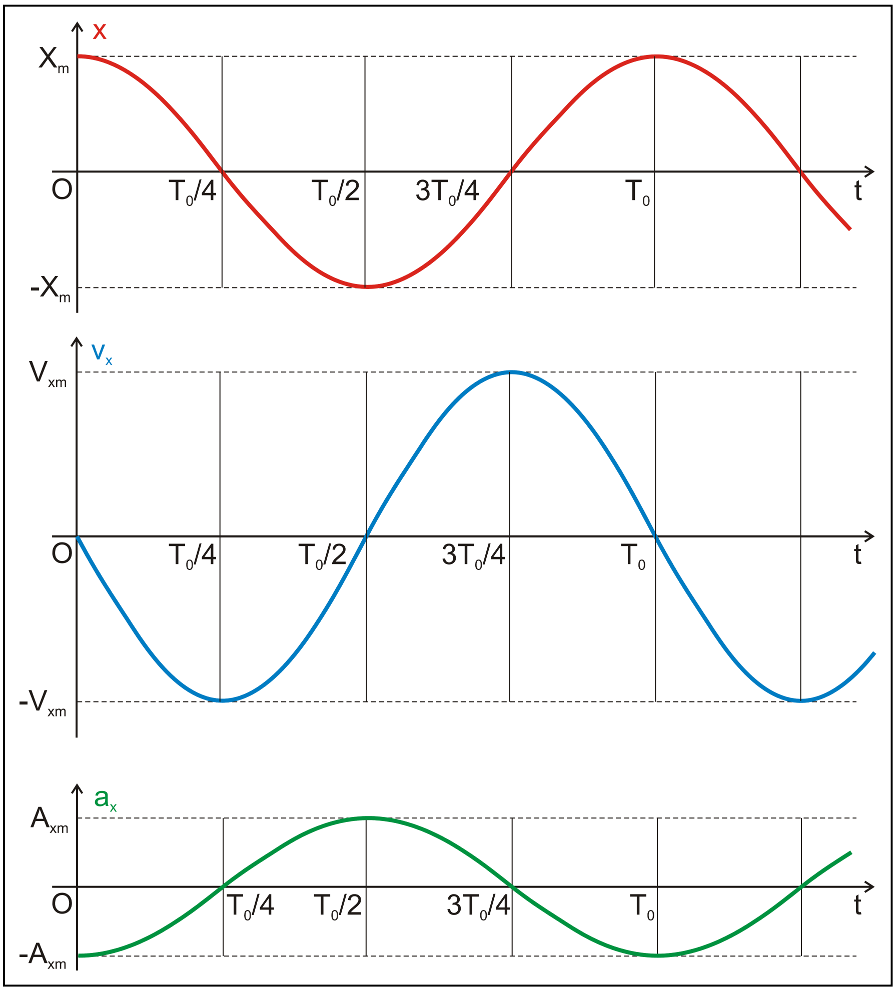
Finalement : $\varphi = 0$, et (5) $\Rightarrow$ $X_m = d$.

k) Equations finales de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération

Elongation : $x(t) = d\cos(\omega_0 t) = X_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$; amplitude de l'élongation : $X_m = d$

Vitesse : $v_x(t) = -d\omega_0 \sin(\omega_0 t) = V_{xm} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}\right)$; amplitude de la vitesse : $V_{xm} = d\sqrt{\frac{k}{m}}$

Accélération : $a_x = -d\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = A_{xm} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \pi\right)$; amplitude de l'accélération : $A_{xm} = d\frac{k}{m}$



l) Applications

Déterminer l'amplitude et la phase initiale pour les conditions initiales suivantes :

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = -d < 0$
  $v_{0x} = 0$

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = 0$
  $v_{0x} = v > 0$

* $t = 0 \Rightarrow$ $x_0 = 0$
  $v_{0x} = -v < 0$

m) Vérification de la conservation de l'énergie mécanique de l'oscillateur

* Energie cinétique du solide : $E_c = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{m X_m^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad E_c = \frac{m X_m^2 k}{2m} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Finalement : $E_c = \frac{X_m^2 k}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

* Energie potentielle élastique du ressort :

$$E_{p\ \text{élastique}} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{k X_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie mécanique de l'oscillateur :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_{p\ \text{élastique}} \\ &= \frac{k X_m^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k X_m^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\ &= \frac{k X_m^2}{2} (\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)) \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} k X_m^2}$$

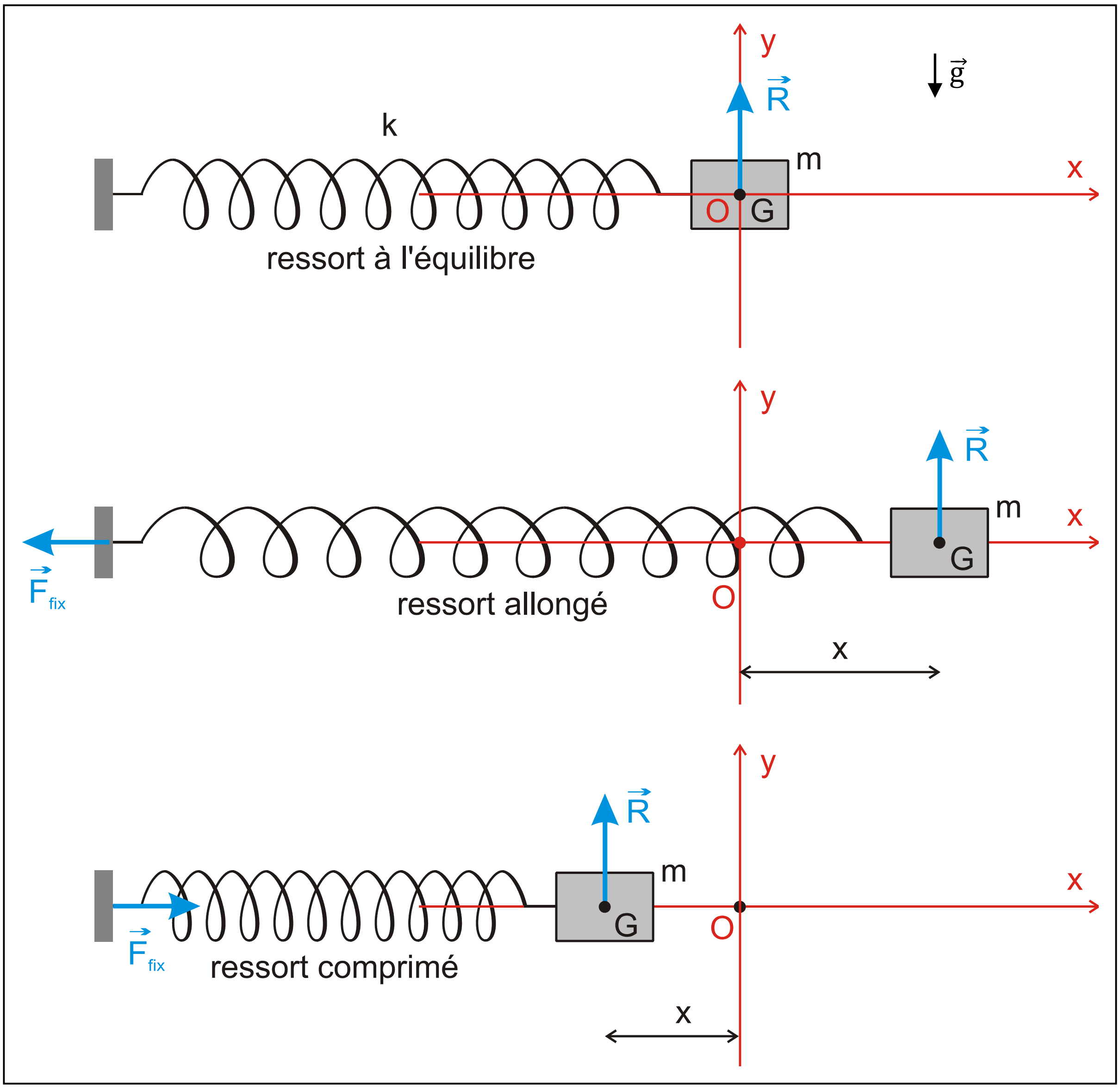
Conclusion :

$\boxed{\text{L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est conservée car k et } X_m \text{ sont constants.}}$

4. Etude énergétique du pendule élastique horizontal

Etablissement de l'équation différentielle à partir d'une considération énergétique (alternative à 3b-e)

* système étudié : corps de masse m accroché au ressort de raideur k dans le champ de pesanteur $\vec{g}$
* référentiel terrestre
* repère : origine O = centre d'inertie G du solide lorsque le ressort n'est pas déformé ; axe Ox parallèle au ressort et orienté dans le sens de l'étirement du ressort ; axe Oy est orienté verticalement vers le haut (sens opposé de $\vec{g}$)



* Forces extérieures et leurs travaux W effectués:
  - force exercée par la fixation au ressort $\vec{F}_{Fix}$:

    $W(\vec{F}_{Fix}) = 0$ car le point d'application ne se déplace pas lors de l'oscillation

- réaction du support $\vec{R}$:

  $W(\vec{R}) = 0$ car la force est perpendiculaire au déplacement lors de l'oscillation

- Les forces de frottement négligeables.

  (Le poids du corps et la tension du ressort sont des forces internes !)

* Loi de la variation de l'énergie mécanique : $\Delta E = \sum W_{\text{Forces extérieures}}$

$$\text{Ici : } \Delta E = W(\vec{F}_{Fix}) + W(\vec{R}) = 0$$

Ainsi l'énergie mécanique $E = E_{pot} + E_{cin}$ d'un oscillateur harmonique non amortie est conservée :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \text{constant}}$$

* Dérivons par rapport au temps cette expression de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kx^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv_x^2) = 0$$ La dérivée d'une constante est nulle.

On obtient en appliquant les règles de dérivation établies en mathématiques :

$$\frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v_x^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}k \cdot 2x\frac{dx}{dt} + \frac{1}{2}m \cdot 2v_x\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$k \cdot x \cdot v_x + m \cdot v_x \cdot a_x = 0$$

Comme $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, on obtient : $kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

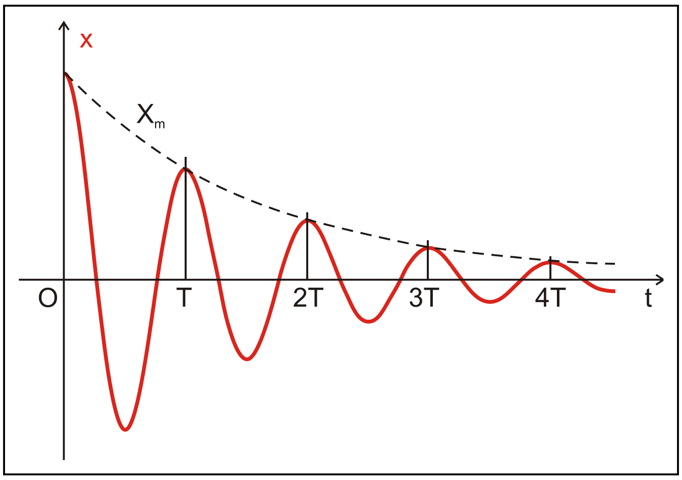
Finalement, on retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$

5. Etude qualitative du pendule élastique amorti

L'amplitude X_m diminue au cours du temps à cause des frottements.

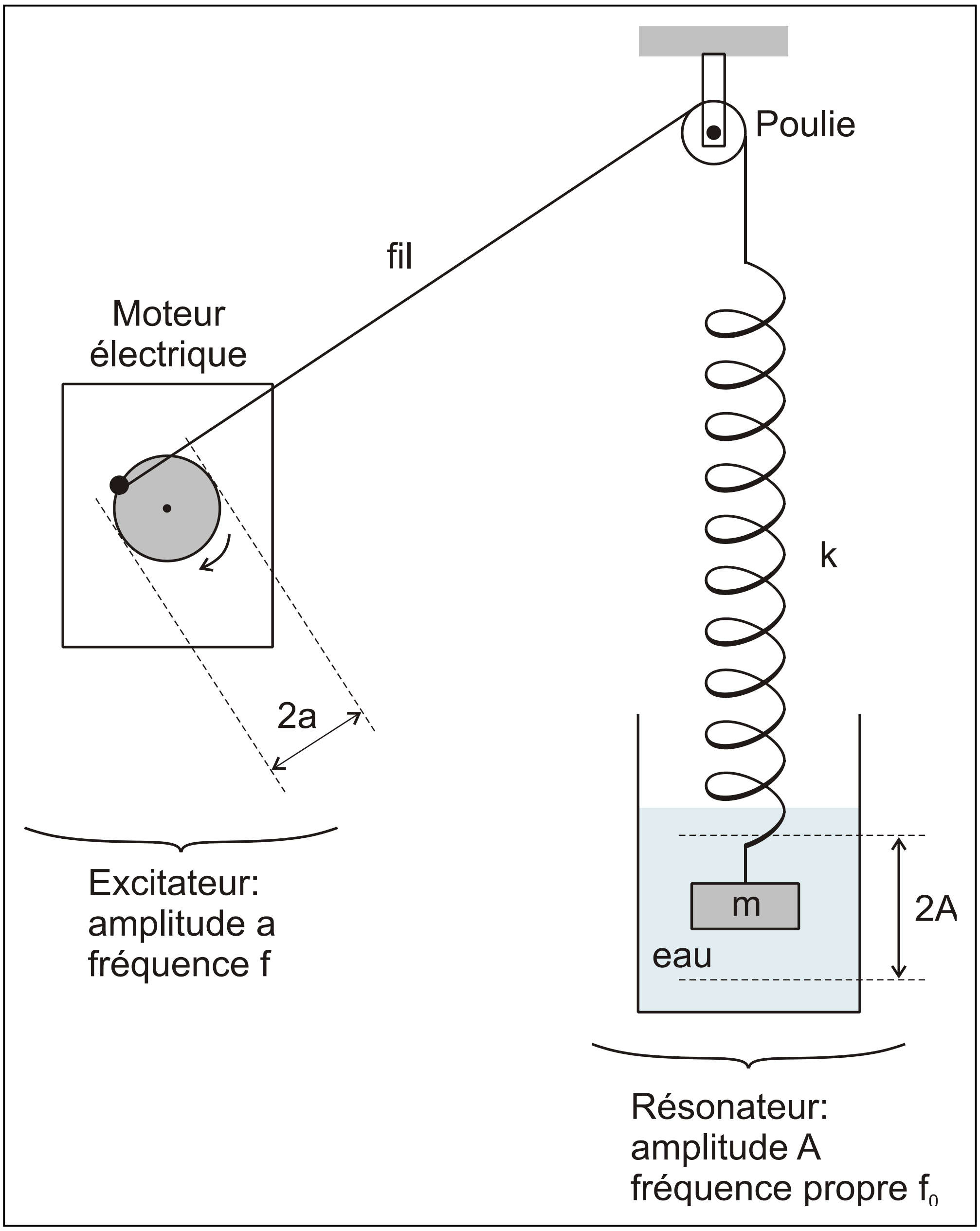
L'énergie mécanique diminue au cours du temps et se transforme en énergie calorifique.

L'oscillateur n'est donc pas périodique. On parle quand-même de sa pseudo-période T.



6. Oscillations forcées. Résonance

Expérience :
Un moteur électrique en rotation joue le rôle d'un excitateur qui produit des oscillations forcées dans le pendule élastique qui est appelé résonateur.

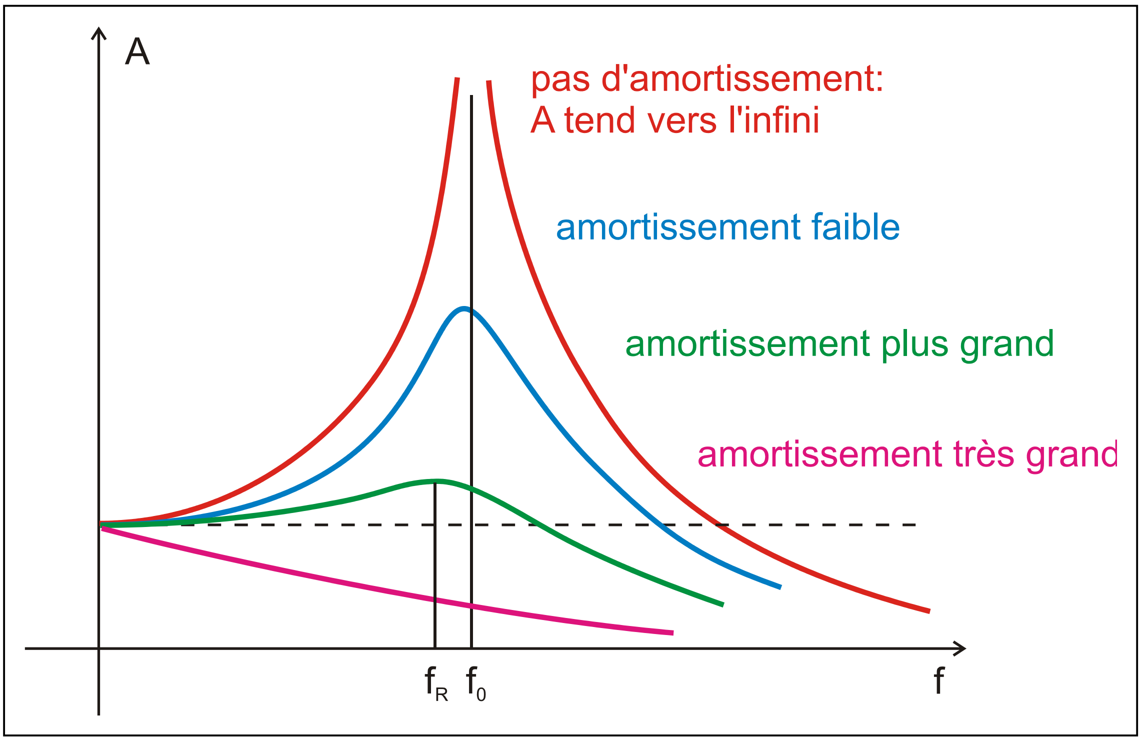


Observations :

* Le résonateur effectue des oscillations de même fréquence f que celle de l'excitateur: il effectue des oscillations forcées.

* L'amplitude A du résonateur dépend de la fréquence f de l'excitateur et de l'intensité de l'amortissement.

* A passe par un maximum : c'est la **résonance**. La fréquence de résonance f_R est alors pratiquement égale à la fréquence propre f_0 du résonateur : $f_R \approx f_0$.
* Si l'amortissement est faible, il se peut que l'amplitude A du résonateur est largement supérieure à l'amplitude a de l'excitateur: A >> a . Le résonateur risque la détérioration. On parle alors de catastrophe de résonance.
* Si l'amortissement est important f_R est légèrement inférieure à f_0.



La courbe de l'amplitude A du résonateur en fonction de la fréquence f de l'excitateur :

A(f) est appelée **courbe de réponse** du résonateur.